

Aula 3

GRANDEZAS PROPORCIONAIS:

A maioria dos problemas que se apresentam em nosso dia-a-dia liga duas grandezas de tal forma que, quando uma delas varia, como consequência varia também a outra.

Assim, a quantidade de combustível gasto por um automóvel depende do número de quilômetros percorridos. O tempo numa construção depende do número de operários empregados. O salário está relacionado aos dias de trabalho.

A relação entre duas grandezas estabelece a lei de variação dos valores de uma em relação à outra. Existem dois tipos básicos de dependência entre grandezas proporcionais: **a proporção direta e a proporção inversa.**

PROPORÇÃO DIRETA OU GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS:

Se analisarmos duas grandezas como trabalho e remuneração, velocidade média e distância percorrida, área e preço de um terreno, altura de um objeto e comprimento da sombra projetada ..., veremos que aumentando ou diminuindo uma delas a outra também aumenta ou diminui.

Então:

Duas grandezas variáveis são diretamente proporcionais quando, aumentando ou diminuindo uma delas numa determinada razão, a outra aumenta ou diminui nessa mesma razão. As razões de cada elemento da primeira por cada elemento correspondente da segunda são iguais, ou seja, possuem o mesmo coeficiente de proporcionalidade.

Exemplo 1:

Um grupo de pessoas se instalou num acampamento que cobra R\$ 10,00, a diária individual. Veja na tabela a relação entre o número de pessoas e a despesa diária.

Número de pessoas	1	2	4	5	10
Despesa diária	10,00	20,00	40,00	50,00	100,00

Percebemos que a razão de aumento do número de pessoas é a mesma para o aumento da despesa. É, portanto, uma proporção direta. As grandezas número de pessoas e despesa diária são diretamente proporcionais, ou seja, a razão entre o número de pessoas e despesa diária são iguais:

$$1/10 = 2/20 = 4/40 = 5/50 = 10/100$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$$1/10 \quad 1/10 \quad 1/10 \quad 1/10 \quad 1/10$$

Exemplo 2:

Os números 3, 10 e 8 são diretamente proporcionais aos números 6, 20 e 16, nessa ordem, porque possuem a mesma razão ou o mesmo coeficiente de proporcionalidade:

$$3/6 = 10/20 = 8/16$$

↓ ↓ ↓

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

PROPORÇÃO INVERSA OU GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS:

Se analisarmos duas grandezas como tempo de trabalho e número de operários para a mesma tarefa, velocidade média e tempo de viagem, número de torneiras e tempo para encher um tanque..., veremos que aumentando uma grandeza, a outra diminuirá.

Então:

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando (ou diminuindo) uma delas numa determinada razão, a outra diminui (ou aumenta) na mesma razão. As razões de cada elemento da primeira pelo inverso de cada elemento correspondente da segunda são iguais. Em outras palavras, duas grandezas são inversamente proporcionais quando os elementos da primeira grandeza forem diretamente proporcionais ao inverso dos elementos da segunda grandeza.

Exemplo 1:

Suponhamos que no exemplo analisado na folha anterior (razão direta), a quantia gasta pelo grupo de pessoas seja sempre R\$ 200,00. Então, o tempo de permanência do grupo dependerá do número de pessoas. Analise a tabela:

Número de pessoas	1	2	4	5	10
Tempo de permanência (dias)	20	10	5	4	2

Percebemos que, se dobrarmos o número de pessoas, o tempo de permanência se reduzirá à metade. É, portanto, uma proporção inversa. As grandezas número de pessoas e número de dias são inversamente proporcionais. A razão entre o número de pessoas é igual ao inverso da razão do tempo de permanência:

$$\frac{1}{1/20} \quad \frac{2}{1/10} \quad \frac{4}{1/5} \quad \frac{5}{1/4} \quad \frac{10}{1/2} = 20$$

Exemplo 2:

Os números 9, 6 e 2 são inversamente proporcionais aos números 4, 6 e 18, nessa ordem, porque a razão entre cada elemento da primeira sucessão e o inverso do elemento correspondentes na segunda sucessão são iguais.

$$\frac{9}{1/4} \quad \frac{6}{1/6} \quad \frac{2}{1/18} = 36$$

REGRA DE TRÊS SIMPLES:

A regra de três simples envolve apenas duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. O processo consiste em montarmos uma tabela colocando em cada coluna, ordenadamente, os valores da mesma grandeza e, daí, obtermos uma equação através da aplicação da propriedade fundamental das proporções. Quando as grandezas forem **diretamente proporcionais**, essa equação terá a mesma forma da tabela.

No caso de grandezas **inversamente proporcionais**, a montagem da equação será feita invertendo-se a razão de uma das grandezas. Quando as grandezas forem diretamente proporcionais dizemos que a **regra de três é direta**. Quando forem inversamente proporcionais, dizemos que a **regra de três é inversa**.

Procedimentos para resolver problemas por regra de três simples:

1º) Montar a tabela: As quantidades correspondentes a uma mesma grandeza devem ser expressas sempre na mesma unidade de medida

Comprimento(m)	Preço(R\$)
5	80,00
9	x

2º) Verificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais:

- Se as grandezas forem diretamente proporcionais, coloca-se uma seta vertical na coluna onde se encontra o x, na direção dele, e uma seta vertical de mesmo sentido na coluna dos outros dados.
- Se as grandezas forem inversamente proporcionais, procede-se da mesma forma na coluna do x, invertendo o sentido da seta na outra coluna.

3º) Determinar o valor de x, que é o termo procurado, através da propriedade fundamental das proporções.

Exemplo:

Cinco metros de um tecido custam R\$ 80,00. Quanto pagarei por 9 metros do mesmo tecido?

Nesse exemplo temos uma regra de três simples e direta. Observe os procedimentos acima:

	Comprimento(m)	Preço(R\$)
5	80,00	
9	x	

$$\frac{5}{9} = \frac{80}{x} \quad x = \frac{80 \cdot 9}{5} \quad x = 144,00$$

REGRA DE TRÊS COMPOSTA:

A regra de três composta envolve três ou mais grandezas relacionadas entre si. Os procedimentos de resolução serão os mesmos da regra de três simples. Quando há dependência inversa entre a grandeza que contém a variável com as demais grandezas, invertemos os elementos da respectiva coluna. A equação será montada, relacionando a grandeza que contém a variável com as demais grandezas.

Exemplo:

Três operários, trabalhando durante 6 dias, produzem 400 peças. Quantas peças desse mesmo tipo produzirão sete operários, trabalhando 9 dias?

Nº de operários	Nº de dias	Nº de peças
3	6	400
7	9	x

Comparando a grandeza que contém o x com as outras duas grandezas, verificamos que são diretamente proporcionais. Então:

$$\frac{400}{x} = \frac{3 \cdot 6}{7 \cdot 9} \quad \frac{400}{x} = \frac{18}{63} \quad \frac{400}{x} = \frac{2}{7} \quad 2x = 2\,800 \quad x = 1\,400 \text{ peças}$$

PORCENTAGEM:

Em nosso dia-a-dia estamos constantemente convivendo com expressões do tipo “O índice de reajuste salarial de maio é de 9,8%.” “O rendimento da poupança foi de 1,58%.” “Liquidação de inverno com 30% de desconto”...

Essas expressões envolvem uma razão especial chamada porcentagem. **Porcentagem, portanto, pode se definida como uma razão cujo conseqüente é 100 ou ainda como uma razão centesimal, onde o conseqüente é substituído pelo símbolo %, chamado “por cento”.**

$$\frac{80}{100} = 0,80 = 80\%$$

CÁLCULOS DE PORCENTAGEM:

Existem vários recursos para resolver cálculos que envolvem porcentagens:

POR UMA FORMA DIRETA ENVOLVENDO O ENTENDIMENTO DE FRACÇÕES:

Exemplo: Quanto é 20% de 800?

20% de 800, é o mesmo que dividir 800 em 100 partes iguais e tomar 20 delas.

$$20 \% \text{ de } 800 = 20/100 \text{ de } 800 \qquad 800 : 100 \cdot 20 = 160$$

ou usando taxa unitária:

$$20\% \text{ de } 800 = 20/100 = 0,20 \qquad 800 \cdot 0,20 = 160$$

Exemplo 1: Um trabalhador cujo salário era de R\$ 2 000,00, recebeu um aumento de 5%. Quanto passou a ser o seu novo salário?

Exemplo 2: Ao comprar um automóvel por R\$ 15 000,00, obtive um desconto de R\$ 1 800,00. Qual foi a taxa de desconto?

Exemplo 3: Uma taxa de 13% é aplicado num determinado capital, produzindo um valor percentual de 5 200,00. De quanto era o capital?

ATIVIDADES:

1. Verificar se os números 18, 6 e 3 são ou não diretamente proporcionais aos números 6, 2 e 1.
2. Verificar se os números da sucessão (30,24,20) são ou não inversamente proporcionais aos números da sucessão (4,5,6)
3. Encontrar x e y, sabendo que os números 20, x, y são diretamente proporcionais aos números 4, 2 e 1.
4. Encontrar x, y e z sabendo que as sucessões (x, 3, z) e (9, y, 36) são inversamente proporcionais com coeficiente de proporcionalidade igual a 36.
5. O número de dias gastos na execução de uma obra é direta ou inversamente proporcional ao número de máquinas empregadas na obra? Por que?
6. Se 6 operários fazem certa obra em 10 dias, em quantos dias 20 operários fariam a mesma obra?
7. Uma viagem foi feita em 12 dias, percorrendo-se 150 Km por dia. Quantos dias seriam necessários para fazer a mesma viagem, percorrendo-se 200 Km por dia?

8. *Três torneiras completamente abertas enchem um tanque em 1h30min. Quantas torneiras de mesma vazão seriam necessárias para encher o mesmo tanque em 54min?*
9. *Um corte de tecido de 2m x 2,5m custa R\$ 100,00. Quanto deverá ser pago por um corte do mesmo tecido de 3m x 5 m?*
10. *Se $\frac{4}{9}$ de uma obra foram feitos em 28 dias, em quantos dias a obra será concluída?*
11. *Um ciclista percorre 120 Km em 2 dias, dirigindo 3 horas por dia. Em quantos dias percorrerá 500 Km, viajando 5 horas por dia?*
12. *Numa fazenda, 3 cavalos consomem 210 Kg de alfafa durante 7 dias. Para alimentar 8 cavalos, durante 10 dias, quantos quilos de alfafa serão necessários?*
13. *Seis digitadores preparam 720 páginas em 18 dias. Em quantos dias 8 digitadores, de mesma capacidade, prepararão 800 páginas?*
14. *Um automóvel, com velocidade média de 60 km/h, roda 8 horas por dia e leva 6 dias para fazer certo percurso. Se a velocidade fosse 80 km/h e se rodasse 9 horas por dia, em quanto tempo ele faria o mesmo percurso?*
15. *Uma torneira enche um tanque em 20 horas, com uma vazão de 1 litro por minuto. Quanto tempo será necessário para que duas torneiras, com vazão de 2 litros por minuto, encham o mesmo tanque?*
16. *Trabalhando 6 horas por dia durante 10 dias, 10 engenheiros executam projetos de 5 pontes. Quantos engenheiros seriam necessários para projetar 8 pontes, trabalhando 8 horas por dia, durante 15 dias?*
17. *Um livro de 120 páginas, com 25 linhas, é impresso em 4 horas. Quantas horas seriam necessárias para imprimir um livro de 100 páginas com 30 linhas por página?*
18. *Uma pessoa que viajará para os Estados Unidos dispõe de R\$ 2 500,00 para a viagem. Quantos dólares conseguirá comprar?*
19. *Calcular:*
 - a) 20 % de 32
 - b) 3,5% de R\$ 4 500
 - c) 4% de 550
20. *Qual a taxa unitária de 20%?*
21. *Qual a taxa porcentual correspondente a 0,05?*
22. *Qual é o número principal em que 20 representa 3%?*
23. *Qual o número principal em que 800 representa $\frac{3}{5}$ %?*

24. Qual a porcentagem em que 2 representa em 40?
25. Um comerciante vendeu um objeto por R\$ 540,00 com um lucro de 15% . Quanto ganhou?
26. Em um escola, as 1120 alunas representam 56% do total de alunos. Qual é esse total?
27. A média de reprovação em concursos públicos é de 82%. Quantos serão aprovados num concurso público com 6 500 inscritos?
28. Walter pediu aumento salarial na empresa em que trabalha, alegando que um simples reajuste (que naquele dissídio seria 7,5%) não cobriria suas reais necessidades. Na ocasião, seu salário era de R\$ 2 850,00 e sua proposta foi uma correção de 9 %. No final do mês, ele recebeu R\$ 3 092, 25. Calculando qual o índice de correção aplicado pela empresa, responda se o pedido foi atendido.
29. Um comerciante comprou um automóvel de R\$ 84 000,00 com desconto de 2%. Em seguida, vendeu o automóvel por um valor 3% acima desse preço(valor inicial do automóvel). Qual foi a taxa de lucro total, desde a venda até a compra, usada pelo comerciante?
30. Dois postos de abastecimento misturam água ao álcool que vendem. No primeiro deles foram encontrados 7,5 l de água em 300 l de álcool e, no segundo, 13,5 l de água em 500 l de álcool. Quanto por cento o álcool de um posto é mais aguado que o do outro/
31. Do que eu recebo, 30% vão para a poupança, 20% para o aluguel e 35% para a alimentação, restando-me apenas R\$ 450,00. Qual é o meu salário?
32. Numa cidade, 45% da população é composta por homens. Qual a população total dessa cidade se nela residem 60 500 mulheres?
33. Uma certa quantia y tornou-se $2y$ após 1 ano e $3y$ após 2 anos. Com relação a quantia inicial, calcule a taxa aplicada no primeiro e no segundo ano.
34. Que taxa devemos utilizar para transformar uma quantia x em $3x$?
35. Um vendedor ganha 3% de comissão sobre as vendas que realiza. Tendo recebido R\$ 300,00 de comissões, qual o total vendido por ele?
36. Comprei uma casa cujo preço era R\$ 200 000,00. Tendo gasto 5% desse valor em impostos e 3% de comissão para o corretor, quanto efetivamente tive que desembolsar?
37. Uma turma tem 40 alunos. Destes, 60% são moças e 40% são rapazes. Em um determinado dia, compareceram às aulas 75% das moças e 50% dos rapazes. Quantos alunos foram às aulas nesse dia? Qual a porcentagem (taxa) que compareceu às aulas nesse dia?